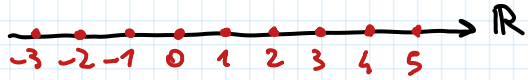
TUTORATO ANALISI I - 25/10/23

DENSITÀ DEI NUMERI RAZIONALI in $\mathbb{R}$

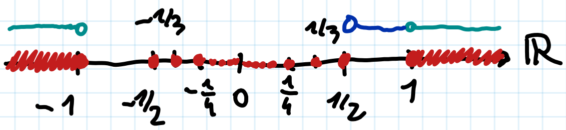
Un insieme $A \subset \mathbb{R}$ si dice DENSO (in $\mathbb{R}$) se
$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad x < y \qquad \exists a \in A$ t.c. $x < a < y$

Es. 1) $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ NON è denso



Gli intervalli $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$, $(0, 1)$ non contengono numeri interi.

2) $A = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\} \cup (1, +\infty) \cup (-\infty, -1)$ NON è DENSO in $\mathbb{R}$



$$\left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\} = \left\{ \pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{1}{4}, \pm \frac{1}{5}, \dots \right\}$$

Ad esempio $\quad A \cap \left(\frac{1}{2}, 1\right) = \emptyset$

3) $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, \ n \neq 0 \right\}$ è DENSO in $\mathbb{R}$.

Sketch della dimostrazione

vedere le dispense a.a. 20/21

$(a, b) \subset \mathbb{R} \quad a < b \implies b - a > 0$.

- ASSIOMA di ARCHIMEDE applicato con $x = b - a$, $y = 1$ ci dice che

$$\exists n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \text{ t.c. } n(b-a) > 1$$

- Considero l'intervallo (na, nb). Questo ha lunghezza

$nb - na = n(b-a) > 1 \implies \exists M \in \mathbb{Z}$ t.c. $M \in (na, nb)$

- da $na < M < nb$ ottengo $a < \frac{M}{n} < b$ e $\frac{M}{n} \in \mathbb{Q}$.

CALCOLO DI LIMITI

1) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^4+3x-1}{12x^3-3}$$

PRELIMINARI • $\frac{0}{0}$ è una forma indeterminata:

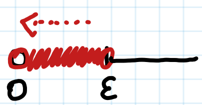
$a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$. Il numero $c = \frac{a}{b}$ è l'unico numero reale tale che $a = b \cdot c$.

Per quali valori $c \in \mathbb{R}$ vale $0 = 0 \cdot c$? TUTTI! $\frac{0}{0}$ non ha significato come numero!

Ad esempio $$\lim_{x\to0^+} \frac{x^3}{x^3} = \lim_{x\to0^+} \frac{\cancel{x^3}}{\cancel{x^3}} = \lim_{x\to0^+} 1 = 1$$

$\frac{x^3}{x^3} = 1$ per $x \neq 0$

[e quindi per ogni x in un intervallo $(0, \varepsilon)$]



"sono tutte forme indet. del tipo $\frac{0}{0}$"

$$\lim_{x\to0^+} \frac{14x^3}{x^3} = 14$$

$$\lim_{x\to0^+} \frac{\alpha \cdot x^3}{x^3} = \alpha \quad \text{per ogni } \alpha \in \mathbb{R}$$

• $\lim_{x\to+\infty} x^4 = +\infty$

• $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^5} = 0$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^4+3x-1}{12x^3-3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4\left(1+3x/x^4-1/x^4\right)}{12x^3\left(1-3/12x^3\right)} =$$

$$= \left(\lim_{x\to+\infty} \frac{x^4}{12x^3}\right) \cdot \left(\lim_{x\to+\infty} \frac{1+3/x^3-1/x^4}{1-1/4x^3}\right) =$$

$$= \left(\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{12}\right) \cdot \left(\frac{\lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{3}{x^3} - \frac{1}{x^4}\right)}{\lim_{x\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{4x^3}\right)} \right) =$$

$$= \underbrace{\left(\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{12}\right)}_{+\infty} \cdot \underbrace{\left(\frac{\overbrace{\lim_{x\to+\infty} 1}^{1} + \overbrace{\lim_{x\to+\infty} \frac{3}{x^3}}^{0} \overbrace{- \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^4}}^{0}}{\underbrace{\lim_{x\to+\infty} 1}_{1} - \underbrace{\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{4x^3}}_{0}} \right)}_{1} =$$

$$= +\infty$$

NELLA PRATICA, tutti questi passaggi possono essere evitati:

GUARDO SOLO I MONOMI DI GRADO MASSIMO

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^4 + 3x^3 - 1}{12x^3 - 3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4}{12x^3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{12} = +\infty$$

---

2) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{12} + 600x - 31}{17x^{11} + 3x^{12}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{12}}{3x^{12}} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{\boxed{x^{12}} \overbrace{\left(1 + \overbrace{600x/x^{12}}^{\to 0} - \overbrace{31/x^{12}}^{\to 0}\right)}^{\to 1}}{\boxed{3x^{12}} \underbrace{\left(\underbrace{17x^{11}/x^{12}}_{\to 0} + 1\right)}_{\to 1}}$$

3) $$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^{37}+12x-6}{x^5+x^7-31x^8} =$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^{37}}{-31x^8} = -\underbrace{\lim_{x\to-\infty} \frac{x^{29}}{31}}_{-\infty} = +\infty$$

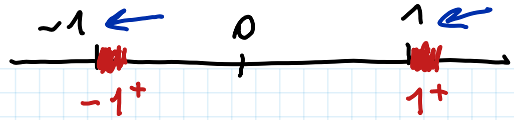
(ma anche)

$$= \frac{1}{-31}\underbrace{\lim_{x\to-\infty} x^{29}}_{-\infty} = +\infty$$

4) $$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^{38}+12x-6}{x^5+x^7-31x^8} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^{38}}{-31x^8} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^{30}}{-31} =$$

$$= -\frac{1}{31}\underbrace{\lim_{x\to-\infty} x^{30}}_{+\infty} = -\infty.$$



5) $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \frac{x^2-2x+1}{x} = 0$

Sostituisco $x=1$: trovo $\dfrac{1-2+1}{1} = 0$

6) $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \frac{x^2-2x+1}{x-1} =$

Sostituisco $x=1$: trovo $\dfrac{0}{0}$ ...

$\displaystyle = \lim_{x\to 1^+} \frac{(x-1)^{\cancel{2}}}{\cancel{x-1}} = \lim_{x\to 1^+} (x-1) = 0.$

7) $\displaystyle\lim_{x\to 2^-} \frac{x-2}{x^2-3x+2} =$

Sostituisco $x=2$: trovo $\dfrac{0}{0}$ ...

$x^2-3x+2 = (x-1)(x-2)$

$\displaystyle = \lim_{x\to 2^-} \frac{\cancel{x-2}}{(x-1)\cancel{(x-2)}} = 1.$

STRATEGIA $\lim\limits_{x \to \square} \frac{p(x)}{q(x)}$ ← polinomi

$\square = \pm\infty \rightsquigarrow$ guardo il rapporto tra i monomi di grado massimo ATTENZIONE: anche i coefficienti CON SEGNO!

$\square = x_0 \rightsquigarrow$ sostituisco → "valore valido" (numero reale, $\pm\infty$) FINE!

→ $\frac{0}{0} \Rightarrow$ SCOMPONGO I POLINOMI.

In questo caso $p(x_0) = 0$, $q(x_0) = 0$, quindi $p(x)$ e $q(x)$ hanno (almeno) un fattore $(x - x_0)$ in comune che si può semplificare

8) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{2}{3x}\right)^x$

CI RICONDUCIAMO al limite notevole

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$1 + \frac{2}{3x} = 1 + \frac{1}{\frac{3}{2}x}$$

$$\left(1 + \frac{1}{\frac{3}{2}x}\right)^x = \left(1 + \frac{1}{\frac{3}{2}x}\right)^{\boxed{\frac{3}{2}x \cdot \frac{2}{3}}} = \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{3}{2}x}\right)^{\frac{3}{2}x}\right]^{2/3}$$

$y = \frac{3}{2}x$: se $x \to +\infty$, allora $y \to +\infty$

$$\lim_{y \to +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{y}\right)^y\right]^{2/3} = \Bigg(\underbrace{\lim_{y \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y}_{e}\Bigg)^{2/3} = e^{2/3}.$$

9) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{24}{x}\right)^{x/7} =$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x/24}\right)^{x/7} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x/24}\right)^{x/24 \cdot 24/7} =$$

$$= \left(\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{\underline{x/24}}\right)^{\underline{x/24}}\right)^{24/7} = e^{24/7}$$

10) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^3}\right)^{12x^3} =$

$$= \lim_{y \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^{12y} = e^{12}$$

$y = x^3$

11) $$\lim_{x\to 2} \frac{\log(\overbrace{x-1})}{\underbrace{x-2}}$$ Sostituisco $x=2$: trovo $\frac{0}{0}$ ...

dobbiamo ricondurci a $$\lim_{x\to 0} \frac{\log(\overbrace{1+x})}{\underbrace{x}} = 1$$

$$y = x-2$$

Se $x\to 2$, allora $y\to 0$ $\qquad x-1 = y+2-1 = y+1$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{\log(y+1)}{y} = 1$$

12) $$\lim_{x\to 1^+} \frac{\log(x^2)}{x^3-3x^2+3x-1} \frac{x^2-2x+1}{x^4-2} \underbrace{\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^x}_{+\infty}$$

- $$\lim_{x\to 1^+} \left(1+\frac{2}{x-1}\right)^x = +\infty$$

sostituendo:

$$\left(1+\frac{2}{\underbrace{\text{“}0^+\text{”}}_{\to+\infty}}\right)^1 = +\infty$$

- $$\frac{\overbrace{\log x^2}^{\to 0}}{\underbrace{x^3-3x^2+3x-1}_{\to 0}} \quad \frac{\overbrace{x^2-2x+1}^{\to 0}}{\underbrace{x^4-2}_{\to -1}}$$

$$x^3-3x^2+3x-1 = (x-1)^3 \quad , \quad x^2-2x+1 = (x-1)^2$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{\log x^2}{(x-1)^{\cancel{3}}} \cdot \frac{\cancel{(x-1)^2}}{x^4-2} =$$

$$= \underbrace{\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x^4-2}}_{\substack{-1 \\ \text{sostituendo}}} \cdot \underbrace{\lim_{x\to 1^+} \frac{\log x^2}{x-1}} = (-1)\cdot 2 = -2$$

$t = x-1$

Se $x \to 1^+$, allora $t \to 0^+$

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{\log (t+1)^2}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0^+} 2\,\frac{\log |t+1|}{t} =$$

$t \to 0^+ \Rightarrow t+1 > 0$ in un intorno di 0

$$= \lim_{t\to 0^+} 2\,\frac{\log (t+1)}{t} = 2$$

In conclusione il risultato del limite è:

$$(-2)\,(+\infty) = +\infty$$

IRRAZIONALITÀ DI $\sqrt{2}$

$$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q} \quad , \text{ cioè } \quad \nexists\, m,n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \quad \text{t.c.} \quad \sqrt{2} = \frac{m}{n} .$$

Dimostrazione

Per assurdo supp. $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ con m,n COPRIMI (cioè $\frac{m}{n}$ ridotta ai minimi termini)

elevando al quadrato $\quad 2 = \frac{m^2}{n^2} \quad$, cioè

$$2n^2 = m^2 \quad (\text{SIAMO in } \mathbb{Z})$$

$\Rightarrow m^2$ PARI $\Rightarrow m$ PARI (il quadrato di un numero dispari è dispari)

$\Rightarrow m = 2 \cdot k \quad$ con $k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow 2n^2 = m^2 = 4k^2$

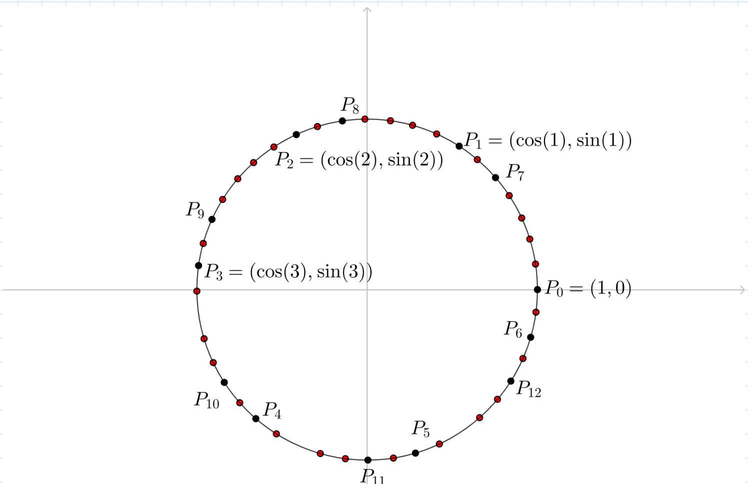
$\Rightarrow \quad n^2 = 2k^2 \Rightarrow n$ PARI $\Rightarrow m,n$ non sono coprimi ($\frac{m}{n}$ non è ridotta ai minimi termini)

contraddizione !

Extra Tutorato [In riferimento all'esercizio: $\sup \left\{ 3 + \frac{1}{\sin(n+1)} \mid n \in \mathbb{N} \right\} = +\infty$]

Esercizio Se $n, m \in \mathbb{N}$, $n \neq m \implies \sin(n) \neq \sin(m)$

Quindi i punti $\{ P_n = (\cos(n), \sin(n)) \mid n \in \mathbb{N} \}$ sono tutti DISTINTI.



P_n per $n = 0, 1, 2, \dots, 40$

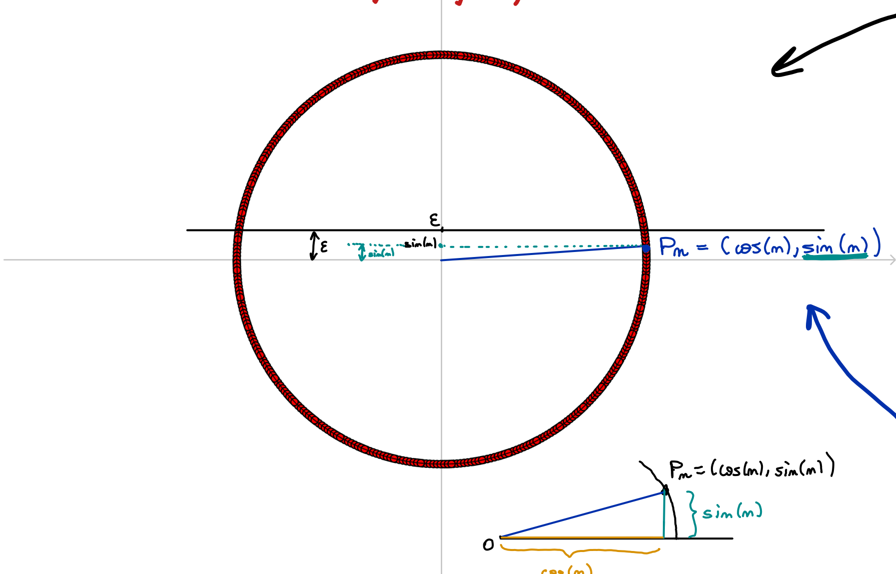
In realtà vale che l'insieme $\{ \sin(n) \mid n \in \mathbb{N} \}$ è DENSO $\underbrace{\text{in } [-1, 1]}$

come prima ma con $[-1,1]$ al posto di $\mathbb{R}$

(NON LO DIMOSTRIAMO!)

Quindi per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n \in \mathbb{N}$ t.c. $0 < \sin(n) < \varepsilon$.

P_n con $n = 0, 1, 2, \dots, 500$



I punti $P_n = (\cos(n), \sin(n))$ si "addensano" sulla circonferenza goniometrica:

Scelto arbitrariamente $\varepsilon > 0$, ne trovo sempre uno di ordinata $< \varepsilon$

Quindi, passando ai reciproci,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N} \text{ t.c. } \quad \frac{1}{\sin(n)} > \frac{1}{\varepsilon}$$

arbitrariamente piccolo

Cioè $\forall M > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N}$ t.c. $\quad \frac{1}{\sin(n)} > M$

$(M = 1/\varepsilon)$

arbitrariamente grande

Cioè $$\sup \left\{ \frac{1}{\sin(n)} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\} = +\infty$$

(e analogamente $\inf \left\{ \frac{1}{\sin(n)} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\} = -\infty$)

prendo l'intervallo $(-\varepsilon, 0)$

Da questo si deduce che:

$$\sup \left\{ 3 + \frac{1}{\sin(n+1)} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\} = +\infty$$

$$\inf \{ \quad '' \quad '' \quad '' \quad \} = -\infty$$